

HUBUNGAN ANTARA KETERCAPAIAN DAN KETERKONTROLAN SISTEM LINIER KONTINU BERGANTUNG TERHADAP WAKTU

CONNECTION OF REACHABILITY AND CONTROLLABILITY FOR CONTINUOUS TIME- VARYING LINEAR SYSTEM

Virza Gavinda Nz¹, Ezhari Asfa'ani^{2§}

¹ Program Studi Matematika, Universitas Andalas, Padang, Indonesia [Email: virza.gev.nz@gmail.com]

² Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: ezhari.asfaani@uinib.ac.id]

[§]Corresponding Author

Received 2019; Accepted 2019; Published 2019

Abstrak

Sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu merupakan suatu model yang banyak dijumpai dalam beberapa aplikasi. Artikel ini mengkaji hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem linier kontinu bergantung waktu. Dengan menggunakan metode aljabar dibuktikan beberapa teorema agar diperoleh hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu. Selain itu, diberikan beberapa contoh sebagai ilustrasi untuk memperkuat keberlakuan teorema-teorema yang telah dibuktikan.

Kata Kunci: ketercapaian, keterkontrolan, sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu

Abstract

Continuous time-varying linier system is a model which many peoples to find in any applications. This paper to teaching connection of reachability and controllability for continuous time-varying linear system. With algebra method we can proof any theorems to result connection of reachability and controllability for continuous time-varying linear system. Futhermore, we given any examples for illustration to be valid this theorems and this proof.

Keywords: reachability, controllability, continuous time-varying linier system

1. Pendahuluan

Diberikan suatu persamaan keadaan dari sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

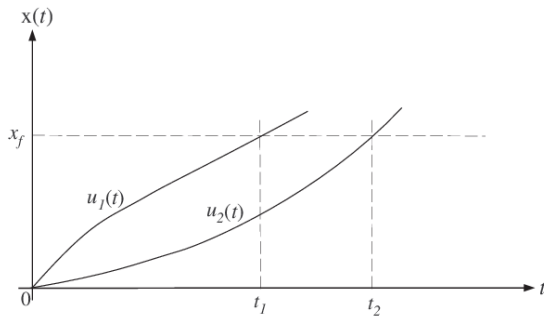
dengan $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dan untuk $t \geq 0$.

Dalam [2] disebutkan bahwa solusi (1.1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2)$$

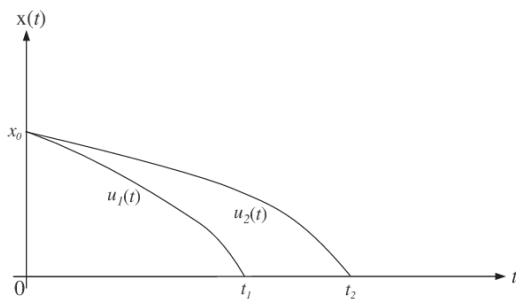
Hal yang menarik untuk dikaji dari sistem linier adalah masalah ketercapaian dan keterkontrolan. Untuk sistem (1), suatu keadaan $\mathbf{x}_f$ dikatakan tercapai jika terdapat suatu input $\mathbf{u}$ yang dapat mentransfer keadaan nol kepada

keadaan $\mathbf{x}_f$ dalam waktu hingga t_f (lihat pada Gambar 1).



Gambar 1. Keadaan Tercapai $\mathbf{x}_f$

Selain itu, suatu keadaan $\mathbf{x}_0$ dikatakan terkontrol jika terdapat suatu input $\mathbf{u}$ yang dapat mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan nol dalam waktu hingga t_f (lihat pada Gambar 2).



Gambar 2. Keadaan Terkontrol $\mathbf{x}_0$

Ketercapaian mengandung makna bahwa kontrol $\mathbf{u}_t$ mesti dicari sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_f = \int_0^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

Selain itu, keterkontrolan bermakna bahwa kontrol $\mathbf{u}(t)$ juga harus dicari sedemikian sehingga

$$\Phi(t_f, 0) \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{0}.$$

Sistem (1) dikatakan tercapai keadaan pada waktu t_f apabila untuk setiap keadaan $\mathbf{x}_f$ tercapai, dan dikatakan terkontrol keadaan pada

waktu t_0 apabila untuk setiap keadaan $\mathbf{x}_0$ terkontrol.

Hasil utama dari artikel ini yaitu memberikan syarat cukup dan perlu kepada masing-masing kriteria dari sistem (1) yaitu ketercapaian, keterkontrolan, dan hubungan kedua kriteria tersebut.

Artikel ini disusun atas beberapa bagian, pada bagian 2 memperkenalkan konsep dasar dari sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu, pada bagian 3 membahas tentang ketercapaian pada sistem (1), pada bagian 4 membahas tentang keterkontrolan pada sistem (1), dan pada bagian 5 membahas tentang hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan dari sistem (1).

2. Sistem Linier Kontinu Bergantung Terhadap Waktu

Diberikan persamaan keadaan dalam [2]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t); \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0 \quad (3)$$

dimana $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ adalah matriks riil bergantung waktu dan $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor input yang kontinu *piecewise* pada interval terbuka (a, b) .

Asumsikan $B(t) = \mathbf{0}$, maka (2) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t); \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0. \quad (4)$$

Jika $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ adalah solusi bebas linier dari (3), maka

$$\Psi(t) = [\mathbf{x}^{(1)}(t) \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}^{(n)}(t)]$$

dikatakan matriks fundamental dari (4). Matriks fundamental $\Psi(t)$ memenuhi persamaan diferensial matriks

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t),$$

dan kondisi awal $\Psi(t_0) = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah tak singular.

Karena $\Psi(t)$ adalah solusi pada (4) dan $\Psi(t_0)$ adalah matriks konstan tak singular untuk t_0 (matriks identitas), maka matriks $\Phi(t, t_0)$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. [2] *Jika Ψ adalah matriks fundamental dari (4), maka Φ yang didefinisikan sebagai*

$$\Phi(t, t_0) \triangleq \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0), \text{ untuk } t, t_0 \geq 0.$$

dikatakan matriks transisi keadaan dari (4).

Berikut merupakan konsep-konsep matriks transisi keadaan dari (4).

Teorema 2.2. [2] *Misalkan $t_0 \in (\alpha, \beta)$ dan*

$\Phi(t, t_0)$ adalah matriks transisi keadaan dari (4) untuk $t \in (\alpha, \beta)$ maka pernyataan berikut benar.

1. $\Phi(t, t_0)$ merupakan solusi tunggal dari persamaan diferensial matriks

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0),$$

dengan $\Phi(t_0, t_0) = I$.

2. Untuk setiap $t, s, \tau \in (\alpha, \beta)$, berlaku

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, s)\Phi(s, \tau).$$

3. Untuk setiap $t, \tau \in (\alpha, \beta)$, berlaku $\Phi(t, \tau)$ tak singular dan

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t).$$

Bukti.

1. Misalkan Ψ matriks fundamental dari (4). Dengan menggunakan Definisi 2.1. diperoleh $\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$. Oleh karena itu,

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0),$$

dan

$$\Phi(t_0, t_0) = I.$$

2. Misalkan Ψ matriks fundamental dan Φ matriks transisi dari (1).

Dengan menggunakan Definisi 2.1 diperoleh

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, s)\Phi(s, \tau),$$

dengan $t, s, \tau \in (\alpha, \beta)$.

3. Misalkan Ψ matriks fundamental, maka $\det(\Psi(t)) \neq 0$ untuk setiap $t \in (\alpha, \beta)$.

Oleh karena itu

$$\det(\Phi(t, \tau)) \neq 0.$$

Dengan demikian, dapat dibuktikan bahwa $\Phi(t, \tau)$ tak singular dan $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$.

□

Berdasarkan konsep matriks transisi keadaan, maka solusi dari (4) diberikan oleh

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$$

Matriks transisi keadaan dari (4) dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.3. [2] *Jika untuk setiap τ dan t berlaku*

$$A(t) \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] = \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] A(t),$$

maka

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right].$$

Teorema 2.4. [5] *Solusi persamaan (4) diberikan oleh*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, t_0) \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t, t_0) \left[\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

dengan $\Phi(t, \tau)$ adalah solusi tunggal dari

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) &= A(t) \Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) &= I. \end{aligned}$$

3. Ketercapaian Sistem Linier Kontinu

Terlebih dahulu akan dipaparkan definisi formal dari ketercapaian sebagai berikut.

Definisi 3.1. [2] *Suatu keadaan $\mathbf{x}_f$ dikatakan tercapai pada waktu t_f jika untuk suatu waktu hingga $t_f > t_0$, terdapat suatu input $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ yang mentransfer keadaan $\mathbf{x}(t)$ dari keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$.*

Jika $\mathbf{x}_f$ tercapai pada waktu t_f dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, maka berdasarkan (2) diperoleh

$$\mathbf{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

dimana $\Phi(t_f, t)$ merupakan matriks transisi keadaan untuk sistem (1).

Misalkan $\mathfrak{R}_r^{t_f}$ menyatakan himpunan dari semua keadaan tercapai pada waktu t_f yang

secara simbolis dapat ditulis

$$\mathfrak{R}_r^{t_f} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ tercapai dari } \mathbf{0} \text{ pada waktu } t_f\}$$

$\mathfrak{R}_r^{t_f}$ merupakan suatu subruang dari ruang vektor keadaan $\mathbb{R}^n$, yang disebut juga sebagai subruang keadaan tercapai. Untuk penyederhanaan penulisan, $\mathfrak{R}_r^{t_f}$ selanjutnya ditulis $\mathfrak{R}_r$.

Definisi 3.2. [2] *Sistem (1) dikatakan tercapai keadaan pada waktu t_f jika setiap keadaan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah tercapai, yakni $\mathfrak{R}_r = \mathbb{R}^n$.*

Menentukan kontrol $\mathbf{u}(t)$ bukan merupakan proses yang sederhana, Maka diperlukan suatu kriteria yang menjamin ketercapaian sistem (1).

Lemma 3.3. [2] *Misalkan*

$$L(\mathbf{u}, t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

dan

$W_r \triangleq W_r(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) d\tau$ dengan $\Phi(t_f, t)$ menyatakan matriks transisi keadaan. Maka $\mathcal{R}(L(\cdot, t_0, t_f)) = \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ untuk setiap $t_f > t_0$.

Bukti. Misalkan $t_f > t_0$ sebarang. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(L(\cdot, t_0, t_f))$ untuk setiap $t_f > t_0$. Misalkan $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r)$, maka terdapat $\boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_f = W_r \boldsymbol{\eta}_1.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) d\tau \right] \boldsymbol{\eta}_1 \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \boldsymbol{\eta}_1 d\tau \end{aligned}$$

Pilih $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)\boldsymbol{\eta}_1$, maka

$$\mathbf{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Akibatnya $\mathbf{x}_f = L(\mathbf{u}, t_0, t_f)$ yang menunjukkan bahwa $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$.

Jadi $\mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$. Misalkan $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$, maka terdapat $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga $L(\mathbf{u}, t_0, t_f) = \mathbf{x}_f$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$.

Andaikan $\mathbf{x}_f \notin \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$, maka terdapat $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0, t_f))$ sedemikian sehingga

$$W_r \mathbf{x}'_f = \mathbf{0},$$

kalikan dari kiri kedua ruas dengan $(\mathbf{x}'_f)^T$, diperoleh

$$(\mathbf{x}'_f)^T W_r \mathbf{x}'_f = 0.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{x}'_f)^T W_r(t_0, t_f) \mathbf{x}'_f \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\mathbf{x}'_f\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Persamaan terakhir berlaku jika $\|B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\mathbf{x}'_f\| = 0$. Selain itu, $\|B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\mathbf{x}'_f\| = 0$ berlaku jika dan hanya jika $B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\mathbf{x}'_f = \mathbf{0}$ untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$, sehingga

$$(\mathbf{x}'_f)^T \mathbf{x}_f = 0.$$

Karena W_r simetris maka $\mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) = \mathcal{N}(W_r(t_0, t_f))^\perp$. Ini dapat

dibuktikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}'''_f \in \mathbb{R}^n \ni W_r \mathbf{x}'''_f = \mathbf{x}''_f \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}''_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0, t_f))^\perp \end{aligned}$$

Diperoleh $\mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) = \mathcal{N}(W_r(t_0, t_f))^\perp$.

Selanjutnya, tulis $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}''_f + \mathbf{x}'''_f$ dimana $\mathbf{x}''_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ dan $\mathbf{x}'''_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0, t_f))$. Karena $\mathbf{x}_f \notin \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ maka $\mathbf{x}'''_f \neq \mathbf{0}$, sedemikian sehingga $(\mathbf{x}'_f)^T \mathbf{x}'''_f \neq 0$ yang mengakibatkan $(\mathbf{x}'_f)^T \mathbf{x}_f \neq 0$.

Ini kontradiksi dengan $(\mathbf{x}'_f)^T \mathbf{x}_f = 0$. Jadi mestilah $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ sedemikian sehingga $\mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$. Oleh karena itu, $\mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f)) = \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ untuk setiap $t_f > t_0$.

□

Teorema 3.4. [2] Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$. Maka terdapat input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, jika dan hanya jika terdapat suatu waktu hingga $t_f > t_0$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$$

Selanjutnya, diberikan

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_1, t)\boldsymbol{\eta}_1$$

dengan $\boldsymbol{\eta}_1$ merupakan suatu solusi dari $W_r(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_f$ dan $t \in [t_0, t_f]$.

Berikut merupakan akibat dari Teorema 3.4 untuk sistem tercapai keadaan yang dengan mudah dibuktikan dengan menggunakan Definisi 3.2 dan Teorema 3.4.

Akibat 3.5. [2] *Sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ tercapai keadaan pada waktu t_f , jika dan hanya jika terdapat waktu hingga $t_f > t_0$ sedemikian sehingga*

$$\text{rank}(W_r(t_0, t_f)) = n.$$

Teorema berikut memberikan suatu input yang dapat mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}_f$ dalam suatu waktu hingga $t_f - t_0$.

Teorema 3.6. [2] *Terdapat suatu input $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)\boldsymbol{\eta}_1$ yang mentransfer keadaan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dari sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$ jika dan hanya jika*

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)).$$

dengan $\boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbb{R}^n$ merupakan solusi dari

$$W_r(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0.$$

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan terdapat input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan dari sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, yaitu

$$\mathbf{x}_f = \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

maka

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Misalkan $\mathbf{x}_f \triangleq \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0$, maka persamaan terakhir dapat ditulis

$$\mathbf{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Dengan diberikan input $\mathbf{u}(t)$, maka $\mathbf{x}_f = W_r\boldsymbol{\eta}_1$, dengan $\boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbb{R}^n$ suatu solusi dari $W_r(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0$. Ini berarti $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$, atau

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)).$$

($\Leftarrow$) Misalkan $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$.

Ini berarti bahwa terdapat $\boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = W_r\boldsymbol{\eta}_1$. Perhatikan bahwa:

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = W_r\boldsymbol{\eta}_1$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\boldsymbol{\eta}_1 d\tau.$$

Dengan menggunakan input $\mathbf{u}(t)$, maka

$$\mathbf{x}_f = \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Persamaan tersebut menyatakan suatu input $\mathbf{u}(t)$ mentransfer dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$. $\square$

Berikut merupakan akibat dari Teorema 3.6. untuk sistem tercapai keadaan.

Akibat 3.7. [2] *Misalkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ tercapai keadaan pada waktu t_f . Maka terdapat input yang mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$. Input yang dimaksud adalah*

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)W_r^{-1}(t_0, t_f)[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0],$$

untuk $t \in [t_0, t_f]$.

Bukti. Misalkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ tercapai keadaan pada waktu t_f , maka pada Akibat 3.5. $\text{rank}(W_r(t_0, t_f)) = n$ untuk suatu waktu $t_f > t_0$, ini mengakibatkan $\det(W_r(t_0, t_f)) \neq 0$ sehingga $W_r(t_0, t_f)^{-1}$ ada.

Berdasarkan Teorema 3.6. diperoleh $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ ini berarti terdapat $\boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $W_r(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0$. Selanjutnya $\boldsymbol{\eta}_1$ dapat dicari sebagai berikut:

$$W_r(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0,$$

kalikan dari kiri kedua ruas dengan $W_r(t_0, t_f)^{-1}$ diperoleh

$$\boldsymbol{\eta}_1 = W_r(t_0, t_f)^{-1}[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0].$$

Substitusikan persamaan tersebut ke input $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)\boldsymbol{\eta}_1$ (berdasarkan Teorema 3.6.), maka diperoleh

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)W_r(t_0, t_f)^{-1}[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0].$$

Dengan memberikan

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)W_r(t_0, t_f)^{-1}[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0]$$

, maka akan mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$. $\square$

Contoh 3.1. Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad \text{dengan}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Akan}$$

ditunjukkan bahwa sistem ini tidak tercapai

keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.3. matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\text{akibatnya } \Phi(t, \tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$W_r(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} e^{-2t_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} (t_f - t_0)e^{-2t_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jelas bahwa $\text{rank}(W_r(t_0, t_f)) < 2 = n$ untuk sebarang $t_f > t_0$, sehingga sistem tidak tercapai keadaan pada t_f .

Contoh 3.2. Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

dengan

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Akan dibuktikan bahwa sistem ini tercapai keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.2 matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\text{akibatnya } \Phi(t, \tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t+2\tau}) \\ e^{-t} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\begin{aligned}
W_r(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f} - e^{-t_f+2\tau}) \\ e^{-t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f} - e^{-t_f+2\tau}) & e^{-t_f} \end{bmatrix} d\tau n \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2t_f} - \frac{1}{2}e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2t_f+4\tau} & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_f+2\tau}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_f+2\tau}) & e^{-2t_f} \end{bmatrix} d\tau n \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
a &= \frac{e^{2t_f}(4t_f - 4t_0 - 3) + 4e^{2t_0} + e^{-2t_f+4t_0}}{16} \\
b &= \frac{e^{-2t_f+2t_0} + (2t_f - 2t_0 - 1)}{4} \\
c &= \frac{e^{-2t_f+2t_0} + (2t_f - 2t_0 - 1)}{4} \\
d &= (t_f - t_0)e^{-2t_f}.
\end{aligned}$$

Jelas bahwa $\text{rank}(W_r(t_0, t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_f > t_0$ sehingga sistem tercapai keadaan pada t_f .

4. Keterkontrolan Sistem Linier Kontinu

Definisi 4.1. [2] Suatu keadaan $\mathbf{x}_0$ dikatakan terkontrol pada waktu t_0 jika untuk suatu waktu hingga $t_f > t_0$, terdapat input $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ yang mentransfer keadaan $\mathbf{x}(t)$ dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$.

Jika keadaan $\mathbf{x}_0$ terkontrol pada waktu t_0 , maka berdasarkan (2) diperoleh

$$-\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

dimana $\Phi(t_0, \tau)$ merupakan matriks transisi keadaan untuk sistem (1).

Misal $\mathfrak{R}_c^{t_0}$ menyatakan himpunan dari semua keadaan terkontrol pada waktu t_0 , yang secara simbolis dapat ditulis

$$\mathfrak{R}_c^{t_0} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ terkontrol pada waktu } t_0\}.$$

$\mathfrak{R}_c^{t_0}$ merupakan suatu subruang dari ruang vektor keadaan $\mathbb{R}^n$, yang disebut juga sebagai subruang keadaan terkontrol. Untuk penyederhanaan penulisan $\mathfrak{R}_c^{t_0}$ selanjutnya ditulis $\mathfrak{R}_c$.

Definisi 4.2. [2] Sistem (1) dikatakan terkontrol keadaan pada waktu t_0 jika setiap keadaan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah terkontrol yakni $\mathfrak{R}_c = \mathbb{R}^n$.

Menentukan kontrol $\mathbf{u}(t)$ bukan merupakan proses yang sederhana, Maka diperlukan suatu kriteria yang menjamin keterkontrolan sistem (1).

Lemma 4.3. Misalkan

$$\hat{L}(\mathbf{u}, t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5)$$

dan

$$W_c \triangleq W_c(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau$$

dengan $\Phi(t_0, t)$ menyatakan matriks transisi keadaan. Maka $\mathcal{R}(\hat{L}(\cdot, t_0, t_f)) = \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$ untuk setiap $t_0 < t_f$.

Teorema 4.4. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$. Maka terdapat input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$, jika dan hanya jika terdapat suatu waktu hingga $t_0 < t_f$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$$

Selanjutnya, diberikan

$$\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\boldsymbol{\eta}_1$$

dengan $\boldsymbol{\eta}_1$ merupakan suatu solusi dari $W_c(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_0$ dan $t \in [t_0, t_f]$.

Berikut merupakan akibat dari Teorema 4.4 untuk sistem terkontrol keadaan yang dengan mudah dibuktikan dengan menggunakan Definisi 4.2 dan Teorema 4.4.

Akibat 4.5. [1] Sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ terkontrol keadaan pada t_0 , jika dan hanya jika terdapat waktu hingga $t_0 < t_f$ sedemikian sehingga

$$\text{rank}(W_c(t_0, t_f)) = n.$$

Teorema berikut memberikan suatu input yang mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}_f$ dalam suatu waktu hingga $t_f - t_0$.

Teorema 4.6. Terdapat suatu input $\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\boldsymbol{\eta}_1$ yang mentransfer keadaan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_0 < t_f$ jika dan hanya jika

$$\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$$

dengan $\boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbb{R}^n$ merupakan solusi dari

$$W_c(t_0, t_f)\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f.$$

Berikut merupakan akibat dari Teorema 4.6 untuk sistem terkontrol keadaan.

Akibat 4.7. Misalkan sistem

$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ terkontrol keadaan pada waktu t_0 . Maka terdapat input yang mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_0 < t_f$. Input yang dimaksud adalah

$$\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)W_c^{-1}(t_0, t_f)[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f],$$

untuk $t \in [t_0, t_f]$.

Contoh 4.1. Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\text{dengan } A(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Akan}$$

dibuktikan bahwa sistem ini terkontrol keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.2, matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+2\tau} - e^{-2t+\tau}) \\ 0 & e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\text{akibatnya } \Phi(t, \tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t+2\tau} - e^{-2t+\tau}) \\ e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$$

dan

$$W_c(t_0, t_f)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0+2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) \\ e^{(-t_0+\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0+2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) & e^{-t_0+\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{2t_0-4\tau} - 2e^{-t_0-\tau} + e^{-4t_0+2\tau}) & \frac{1}{2}(e^{t_0-2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) \\ \frac{1}{2}(e^{t_0-2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) & e^{-2t_0+2\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$a = \frac{-e^{2t_0-4t_f} + 8e^{-t_0-t_f} + 2e^{-4t_0+2t_f} - 9e^{-2t_0}}{16}$$

$$b = \frac{e^{t_0-2t_f} - e^{-2t_0+t_f} - 3e^{-t_0}}{4}$$

$$c = \frac{e^{t_0-2t_f} - e^{-2t_0+t_f} - 3e^{-t_0}}{4}$$

$$d = \frac{e^{-2t_0+t_f} - 1}{2}.$$

Jelas bahwa $\text{rank}(W_c(t_0, t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_0 < t_f$ sehingga sistem terkontrol keadaan pada t_0 .

5. Hubungan Antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Kontinu

Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem (1).

Teorema 5.1. [2] Jika sistem

$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ tercapai keadaan pada t_f , maka sistem tersebut terkontrol keadaan pada suatu $t_0 < t_f$. Selain itu, jika sistem tersebut terkontrol keadaan pada t_0 , maka sistem tersebut tercapai keadaan pada suatu $t_f > t_0$.

Contoh 5.1. Diberikan sistem

$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dimana

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}. \text{ Dalam Contoh}$$

3.1. telah ditunjukkan bahwa sistem tercapai keadaan pada t_f . Akan dibuktikan bahwa sistem ini terkontrol keadaan pada t_0 . Karena sistem tercapai keadaan pada t_f , maka terdapat suatu

waktu berhingga $t_f > t_0$ sedemikian sehingga

$$\text{rank}(W_r(t_0, t_1)) = n = 2$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, \tau)B(\tau) &= \begin{bmatrix} e^{-(t_0-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t_0+\tau} - e^{-t_0+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t_0-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0+2\tau}) \\ e^{-t_0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} W_c(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0+2\tau}) \\ e^{-t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0+2\tau}) & e^{-t_0} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2t_0} - \frac{1}{2}e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2t_0+4\tau} & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0+2\tau}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0+2\tau}) & e^{-2t_0} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= \frac{e^{2t_f}(4t_f - 4t_0 - 5) + 4e^{2t_0} + e^{-2t_f+4t_0}}{16} \\ b &= \frac{e^{-2t_f+2t_0} + (2t_f - 2t_0 - 1)}{4} \\ c &= \frac{e^{-2t_f+2t_0} + (2t_f - 2t_0 - 1)}{4} \\ d &= (t_f - t_0)e^{-2t_0} \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\text{rank}(W_c(t_0, t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_0 < t_f$. Oleh karena itu sistem

terkontrol keadaan pada t_0 .

Contoh 5.2. Diberikan sistem

$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dengan

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Dalam Contoh}$$

4.1 telah ditunjukkan bahwa sistem terkontrol keadaan pada t_0 . Akan dibuktikan bahwa sistem ini tercapai keadaan pada t_f . Karena sistem terkontrol keadaan pada t_0 , maka terdapat suatu waktu berhingga $t_0 < t_f$ sedemikian sehingga

$$\text{rank}(W_c(t_0, t_1)) = n = 2$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+2\tau} - e^{-2t+\tau}) \\ 0 & e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } \Phi(t_f, \tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f+2\tau} - e^{-2t_f+\tau}) \\ e^{(-t_f+\tau)} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} W_r(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f+2\tau} - e^{-2t_f+\tau}) \\ e^{(-t_f+\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f+2\tau} - e^{-2t_f+\tau}) & e^{(-t_f+\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{2t_f-4\tau} - 2e^{-t_f-\tau} + e^{-4t_f+2\tau}) & \frac{1}{2}(e^{3\tau} - e^{-3t_f+2\tau}) \\ \frac{1}{2}(e^{3\tau} - e^{-3t_f+2\tau}) & e^{-2t_f+2\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dima

$$\begin{aligned} a &= \frac{7e^{-2t_f} - 8e^{-t_0-t_f} + 5e^{-4t_0+2t_f}}{16} \\ b &= \frac{e^{-t_f} + e^{t_f-2t_0} - 2e^{-2t_f+t_0} - 2}{4} \\ c &= \frac{e^{-t_f} + e^{t_f-2t_0} - 2e^{-2t_f+t_0} - 2}{4} \\ d &= \frac{1}{2}(t_f - t_0) \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\text{rank}(W_r(t_0, t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_f > t_0$. Oleh karena itu sistem tercapai keadaan pada t_f .

6. Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan uraian pada bagian 3, bagian 4, dan bagian 5, maka dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

- 1) Syarat cukup dan perlu untuk tercapai keadaan dari sistem (1) adalah

$$\text{rank}(W_r(t_0, t_f)) = n,$$

- 2) Syarat cukup dan perlu untuk terkontrol keadaan dari sistem (1) adalah

$$\text{rank}(W_c(t_0, t_f)) = n,$$

- 3) Jika sistem (1) tercapai keadaan pada t_f , maka sistem tersebut terkontrol keadaan pada suatu $t_0 < t_f$. Selain itu, jika sistem tersebut terkontrol keadaan pada t_0 , maka sistem tersebut tercapai keadaan pada suatu $t_f > t_0$.

7. Ucapan Terima Kasih

Pada artikel ini penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Pengelola Rumah Jurnal UIN Imam Bonjol Padang

2. MAp Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang
3. Rekan-Rekan Dosen program studi matematika
4. Para penulis Map Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Lima*. Terjemahan, Erlangga. Jakarta.
- [2] Antsaklis, Panos J. dan Anthony N. Michel. 2006. *Linear Systems*. Birkhauser. Boston.
- [3] Antsaklis, Panos J. dan Anthony N. Michel. 2007. *A Linear Systems Primer*. Birkhauser. Boston.
- [4] Cullen, C.G. 1966. *Matrices and Linear Transformation*. Addison Wesley Publising. Pittsburg-Pennsylvania.
- [5] Gopal, M. 1993. *Modern Control System Theory*. New Age International (P) Ltd. New Delhi.
- [6] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. W.H. Freeman and Company. New York.
- [7] Laub, Alan J. 2005. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. SIAM. USA.